27/10/15

Ⓐ $y'' = f(x, y')$: $u = y'$

<u>Άσκηση 4.4.1 (i) σελίδα 52</u>

$xy'' = y' + x^2$

Θέτω $y' = u$, είναι $y'' = u'$

Η εξίσωση γίνεται : $xu' = u + x^2 \rightsquigarrow$

$u' - \frac{1}{x} u = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

Λύνω ως προς u :

$u(x) = e^{-\int -\frac{1}{x} dx} \left[c_1 + \int \frac{x^2}{x} e^{\int -\frac{1}{x} dx} dx \right] = e^{\ln|x|} \left[c_1 + \int x e^{-\ln|x|} dx \right]$

$= |x| \left[c_1 + \int x \frac{1}{|x|} dx \right] = |x| \left[c_1 + |x| \right] = c_1 |x| + x^2$

οπότε $y(x) = \int (c_1|x| + x^2) dx + c_2$

<u>Σημείωση:</u> Για να μην έχω απόλυτα προσαρμόζω την άσκηση έτσι όπως θέλω εγώ, δηλαδή για θετικά ή αρνητικά. Επίσης αν έχω αρχικές τιμές, τότε με υπαγορεύουν λύσεις

Ⓑ $y'' = f(y, y')$: $u = y' \Rightarrow y'' = u \frac{du}{dy}$

<u>Άσκηση 2ii σελίδα 52</u>

$yy'' - (y')^2 = y^2 y'$

$yu\frac{du}{dy} - u^2 = y^2 u$

<u>1η περίπτωση</u>

$u = 0$, $y' = 0$

άρα $y = c$

έχει άπειρες σταθερές λύσεις

<u>2η περίπτωση</u>

$y\frac{du}{dy} - u = y^2$

Η παραπάνω είναι εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών.

(C) $y'' + p_1 y' + p_2 y = q$ (E)

$\qquad\qquad\qquad = 0$ (E_0)

αν y_1 λύση της (E_0) τότε ο μετασχηματισμός $y = uy_1$ ανάγει την (E) σε γραμμική διαφορική εξίσωση α' τάξης.

<u>Πράγματι</u> αν y_1 λύση της (E_0), τότε $q = y'' + p_1 y' + p_2 y \rightsquigarrow$

$q = u'' y_1 + 2u' y_1' + u y_1'' + p_1 u' y_1 + p_1 u y_1' + p_2 y_1 u =$

$u[y_1'' + p_1 y_1' + p_2 y_1] + y_1 u'' + (2y_1' + p_1 y_1) u'$

0, αφού υποθέσαμε ότι y_1 λύση της ομογενούς

$\Rightarrow q = y_1 u'' + (2y_1' + p_1 y_1) u'$

Για $z = u'$ είναι $z' = u''$ και $q = y_1 z' + (2y_1' + p_1 y_1) z$

<u>Άσκηση 4.44 i</u> σελίδα 53

$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y_1 = x$ $x \in (-1,1)$

Θέτω $y = xu$.

$(1-x^2)[u''x + 2u' + 0] - 2x[u'x + u] + 2ux = 0. \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow (1-x^2)xu'' + (1-x^2)2u' - 2x^2 u' - \cancel{2xu} + \cancel{2ux} = 0 \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow (1-x^2)xu'' + 2(1 - x^2 - x^2)u' = 0.$

Για $z = u'$, έχουμε :

$(1-x^2)xz' + z(1-2x^2) = 0 \rightsquigarrow \dfrac{z'}{z} = \dfrac{2(2x^2-1)}{(1-x^2)x}$

$\ln|z| = 2\displaystyle\int \frac{2x^2-1}{x(1-x^2)}\,dx + c_1$

(A-16)

<u>Πρόταση</u>

▷ Αν όλες οι λύσεις της (Q) είναι προς το 0 για $x \to +\infty$, τότε όλες οι λύσεις της (P) είναι προς το 0 για $x \to +\infty$.

Η πρόταση είναι ψευδής:

αν $p(x) = 1 \rightsquigarrow y' + y = 0 \rightsquigarrow y(x) = c_1 e^{-x}$

$\quad q(x) = -1 \rightsquigarrow z' - z = 0 \rightsquigarrow z(x) = c_2 e^{x}$

(A-27)

Για το (ii) ερώτημα, να δειχθεί ότι η ολοκληρωτική ποσότητα είναι καλά ορισμένη και μάλιστα παραγωγίσιμη, και να αποδειχθεί ότι ικανοποιεί την εξίσωση.

• $y' + p(x)y = q(x)$ (E)
συνθήκη (C) $y(x_0) = y_0$ / Πρόβλημα αρχικών τιμών (E)-(C).

$y' = f(x,y)$
$y(x_0) = y_0$

Η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz σε ένα σύνολο $E \subseteq D_f$, ως προς την β' μεταβλητή αν $\exists K>0$:
$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq k|y_1 - y_2|$ $\forall (x,y) \in E$ ή $\forall (x,y_1),(x,y_2) \in E$.

παραδείγματα

• $f(x,y) = \sqrt{y}$, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ δεν γνωρίζω αν ισχύει η συνθήκη, αλλά μπορώ να ελέγξω στο $\mathbb{R}\times[2,7]$

$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq |\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}| \leq k|y_1 - y_2|$

$$\left|\frac{y_1 - y_2}{\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \nearrow k.$$

• $y' = x^2 + y^2$
$f(x,y) = x^2 + y^2$
$\mathbb{R}\times[-1000, 500]$

$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |y_1^2 + y_2^2| = |y_1 - y_2||y_1 + y_2| \leq |y_1 - y_2|(|y_1| + |y_2|) \leq$ $2000|y_1 - y_2|$.

- Αν υπάρχει η $\frac{\partial f}{\partial y}$ στο E και είναι φραγμένη, τότε η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz σε κάποιο E.